Gerechte Verteilung als Mathematisches Problem

Braß, Helmut

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1993 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.85-96

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

HELMUT BRASS, Braunschweig

Gerechte Verteilung als Mathematisches Problem

Braunschweig, 8. Oktober 1993*

1. Einleitung

Der Begriff der Gerechtigkeit ist seit 2000 Jahren Gegenstand der Diskussion in Philosophie, Theologie und Rechtswissenschaft. Es mag verwundern, wenn sich hier die Mathematik zu Wort meldet. Zwar hat sie den genannten Wissenschaften voraus, daß ihre Begriffe scharf umrissen und ihre Ergebnisse unstrittig sind, aber der Verdacht liegt nahe, daß ihre Werkzeuge viel zu grob sind, um eine angemessene Behandlung des vielschichtigen und subtilen Begriffes der Gerechtigkeit zu erlauben. Demgegenüber soll hier gezeigt werden, daß Mathematik – das heißt strikte Formalisierung – sehr wohl zur Diskussion beitragen kann, auch, indem sie hilft, den Stoff zu strukturieren, die Begriffe zu präzisieren, Meinungen von Argumenten und Denkgewohnheiten von Sachzwängen zu unterscheiden.

Über die gerechte Verteilung eines Gutes läßt sich häufig keine Einigkeit erzielen, jedoch findet man leichter einen Konsens darüber, daß manche Verteilungen sicher ungerecht sind. Die Ungerechtigkeit wird darin gesehen, daß gewisse sehr allgemeine (d. h. schwache) Prinzipien verletzt sind. Hiernach kann ein Verteilungsmechanismus von der Gesellschaft nur akzeptiert werden, wenn er in keinem Anwendungsfall die Prinzipien verletzt. Die Formulierung der Prinzipien ist nicht Sache der Mathematik, die Mathematik hat ihre Erfüllbarkeit und ihre Kombinierbarkeit zu untersuchen.

Hier sollen die Anfänge der Ausführung eines solchen Programms anhand eines konkreten Problems beschrieben werden. Es wird dabei weniger um den Beweis einschlägiger mathematischer Lehrsätze (die es durchaus gibt!) und mehr um Grundsätzliches zur Formalisierung gehen.

2. Das Problem

Es sollen m untereinander gleichwertige unteilbare Güter auf p Bewerber $P_1, P_2, \ldots, P_p$ gemäß den Ansprüchen $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ verteilt werden, hierbei sind die w_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ natürliche Zahlen, die die Größe des Anspruches von P_i charakterisieren. Die Schwierigkeit dieses „Zuteilungsproblems" liegt in der Präzisierung von „gemäß den Ansprüchen $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$".

* Zusammenfassung eines vor der Plenarversammlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehaltenen Vortrags.

Zur Verdeutlichung diene ein praktischer Fall. In der untenstehenden Tabelle ist ein Wahlergebnis aus den Gremienwahlen 1993 der TU Braunschweig angegeben. Es bewarben sich vier hochschulpolitische Gruppen $P_1, \dots, P_4$ um $m = 20$ Sitze im Konzil. In der zweiten Spalte stehen die erreichten Stimmenzahlen, diese sind die „Ansprüche" im Zuteilungsproblem. Wie soll man die 20 Sitze den vier Gruppen zuteilen? P_1 hat von den abgegebenen 303 Stimmen 25 erhalten, demnach stehen P_1 von den 20 zu verteilenden Sitzen $\frac{25}{303}20 = 1{,}65 \dots$ zu, diese „Quoten" sind in der dritten Spalte aufgeführt. Natürlich müssen die Zuteilungen ganzzahlig sein; wenn man in der üblichen Weise rundet, erhält man die Zahlen in Spalte 4.

Wahl zum Konzil der TU Braunschweig 1993
Gruppe der wissenschaftlichen Mitarbeiter

Partei	Stimmenzahl	Quote	Sitz-Zuteilungen		
P_1	25	1,650	2	1	2
P_2	26	1,716	2	1	2
P_3	201	13,267	13	15	12
P_4	51	3,366	3	3	4
	303		20	20	20

Überraschenderweise ist die wirklich erfolgte Zuteilung eine andere: Spalte 5. Ist das gerecht? P_3 hat weniger als die 8fache Stimmenzahl von P_2, aber die 15fache Sitzzahl, P_1 und P_2 haben zusammen die gleiche Stimmenzahl wie P_4, aber P_4 hat 50% mehr Sitze, P_3 hat weniger als $\frac{2}{3}$ aller Stimmen, aber $\frac{3}{4}$ aller Sitze.

Es beruht jedoch die Zuteilung in Spalte 5 ebenfalls auf einem simplen und einleuchtenden Prinzip, nämlich: Man vergibt für je d Stimmen einen Sitz, wobei d so gewählt ist, daß gerade alle verfügbaren Sitze verteilt werden. Das ist das Verfahren von d'Hondt, das für die Zuteilung bei Hochschulwahlen vorgeschrieben ist.

In Spalte 6 ist noch eine weitere Zuteilung angegeben, für die ebenfalls der Anspruch besonderer Gerechtigkeit erhoben wird. Zu ihrem Verständnis führt man den Begriff der „Wahlzahl" von P_i ein, das ist die Zahl der Stimmen, die P_i für einen Sitz aufbringen muß (im Fall der Zuteilung nach Spalte 5 sind das die Zahlen 25; 26; 13,4; 17). Gerechtigkeit gebietet, daß die Wahlzahlen der Bewerber gleich oder annähernd gleich sind. Interpretiert man das dahingehend, daß die Differenz

größte Wahlzahl minus kleinste Wahlzahl

möglichst klein gemacht werden soll, dann ist die Zuteilung in Spalte 6 optimal.

Man erkennt hieran, daß die Aufgabe der gerechten Verteilung der Sitze nicht durch ein ad hoc gewähltes Verfahren gelöst werden kann, weil eben andere ebenso plausible

Verfahren zu anderen Zuteilungen führen. Es wird nötig sein, auf elementare Prinzipien zurückzugehen.

Vorher soll aber noch darauf hingewiesen werden, daß unser Problem eine erhebliche praktische Bedeutung hat: Gemeindewahlen, Ortsratswahlen, Landtagswahlen, Bundestagswahlen, Europawahlen, Sozialwahlen, Personalratswahlen, zahlreiche Wahlen an Universitäten sind alles Beispiele für Listenwahlen. In allen Fällen ist eine Vorschrift nötig, die Stimmzahlen in Sitzzahlen umrechnet: ein Zuteilungsverfahren. Die Auswahl dieses Verfahrens ist kein ganz marginales Problem, sind doch eine Reihe von Fällen bekannt geworden, in denen über Regierung und Opposition nicht die Wähler bestimmten, sondern das Zuteilungsverfahren. Als ein Beispiel sei die Stadtratswahl 1976 in Braunschweig genannt: Von den zu verteilenden 57 Sitzen erhielt die SPD nach dem (praktizierten) Verfahren von d'Hondt 29 Sitze, also die absolute Mehrheit; hätte man das Verfahren der größten Reste verwendet, wie das 1978 bei der Landtagswahl in Niedersachsen geschah, so hätte die SPD nur 28 Sitze erhalten und CDU und FDP zusammen 29.

Die politischen Wahlen sind ein besonders prominentes Beispiel der Zuteilungsproblematik, es gibt aber zahlreiche andere Anwendungsfälle, etwa:

1) eine Vertretungskörperschaft wird von verschiedenen Gruppen beschickt, diese sollen annähernd proportional ihrer jeweiligen Stärke vertreten sein; ein vieldiskutiertes Beispiel ist das Repräsentantenhaus der USA (Ansprüche sind die Einwohnerzahlen der einzelnen Staaten), ein anderes Beispiel sind Ausschüsse in Parlamenten (Ansprüche sind die Fraktionsstärken), ein drittes der Rundfunkrat für den Deutschlandfunk (Ansprüche sind die Fraktionsstärken im Bundestag), und vieles mehr.
2) gemäß Bundeswahlgesetz soll „die Zahl der Wahlkreise in den einzelnen Länderen deren Bevölkerungsanteil soweit wie möglich entsprechen". Hier sind also $m = 328$ Wahlkreise zu verteilen, Ansprüche sind die Einwohnerzahlen der Bundesländer.
3) eine Etaterhöhung von 4000 DM ist auf 7 Hochschulinstitute aufzuteilen mit der Nebenbedingung, daß die Etats – wie bisher – Vielfache von 100 sind. Ansprüche sind gegeben durch die bisherigen Etats. Hier ist also $m = 40$.

3. Formalisierung

Zuteilungsverfahren sind Vorschriften, die aus „Ansprüchen", ausgedrückt durch p-Tupel natürlicher Zahlen (z. B. Wahlergebnisse) „Zuteilungen", das sind p-Tupel mit Summe m (z. B. Sitzzahlen im Parlament) ermitteln. Wir führen demgemäß die folgenden Bezeichnungen ein:

$\mathcal{A}_p$ sei die Menge der p-Tupel natürlicher Zahlen ohne $(0, 0, \dots, 0)$

$\mathcal{A}_{p,m}$ sei die Untermenge derjenigen Elemente von $\mathcal{A}_p$, deren Komponenten die Summe m haben.

Es wäre nun aber wenig zweckmäßig, Abbildungen von $\mathcal{A}_p$ in $\mathcal{A}_{p,m}$ als Zuteilungsverfahren anzusehen; die elementare Gerechtigkeitsforderung, Gleiches gleich zu behandeln, ließe sich mit einer solchen Definition nicht realisieren. Hätte man nämlich zwei Parteien mit exakt gleichen Ansprüchen und $m = 1$, so ist die Wahl zwischen den möglichen Zuteilungen (1,0) und (0,1) nicht willkürfrei möglich. Da die Zuteilung allein aufgrund der Ansprüche erfolgen soll, muß ein gerechtes Verfahren beide Möglichkeiten ergeben. Die endgültige Zuteilung erfolgt dann durch Los (so vorgesehen in den meisten Wahlgesetzen) oder aufgrund zusätzlicher Informationen, ist jedenfalls nicht Sache der Zuteilungsverfahren.

Wir werden hiernach Zuteilungsverfahren als mengenwertige Abbildungen definieren: einem Anspruch wird eine Menge von gleichberechtigten Zuteilungen zugeordnet; natürlich ist man besonders an Verfahren interessiert, in denen diese Menge meistens nur ein Element enthält.

Wir führen noch eine weitere Bezeichnung ein:

$\overline{\mathcal{A}}_{p,m}$ sei das System der nichtleeren Untermengen von $\mathcal{A}_{p,m}$

und können nun die entscheidende Definition formulieren:

Definition: Eine Abbildung f von $\mathcal{A}_p$ in $\overline{\mathcal{A}}_{p,m}$ heißt (p, m)-Zuteilungsverfahren, wenn gilt

(i) Ist $(z_1, z_2, \ldots, z_p) \in f(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ und ist σ eine Permutation von $\{1, 2, \ldots, p\}$, so ist $(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(p)}) \in f(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, \ldots, w_{\sigma(p)})$

(ii) Ist $(z_1, z_2, \ldots, z_p) \in f(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ und ist $w_i = 0$ für ein i, so ist $z_i = 0$.

(i) und (ii) sind Mindestanforderungen an jede Präzisierung der intuitiven Vorstellung von gerechter Verteilung; (i) bedeutet Gleichbehandlung der Bewerber: Vertauscht man die Ansprüche von zwei Bewerbern, so sind die Zuteilungen entsprechend zu vertauschen; (ii) besagt, daß es keine Zuteilung gibt ($z_i = 0$) wenn kein Anspruch vorliegt ($w_i = 0$).

Definition: Ein Zuteilungsverfahren ist eine Menge von (p, m)-Zuteilungsverfahren, die zu jedem Paar (p, m) $(p \in \{1, 2, \ldots\}, m \in \{1, 2, \ldots\})$ genau ein (p, m)-Zuteilungsverfahren enthält.

Zahlreiche Beispiele konkreter Zuteilungsverfahren findet man in den Büchern von Kopfermann [2] und Balinski/Young [1]. Wir begnügen uns hier mit der Beschreibung des „Verfahrens der größten Reste" (auch Hare-Verfahren oder Hamilton-Verfahren genannt). Dies Verfahren ist einfach und naheliegend und wird (mit einer kleinen Modifikation) bei den Bundestagswahlen verwendet. Sein Prinzip ist die Berechnung der „Quoten"

$$q_i := w_i \left(\sum_{\nu=1}^{p} w_\nu \right)^{-1} m$$

und die anschließende (Auf- oder Ab-)Rundung der Quoten auf ganze Zahlen, wie schon im vorigen Abschnitt erläutert. Allerdings kann die Rundung nicht immer in der üblichen Weise: Aufrundung bei Bruchteilen $> \frac{1}{2}$, Abrundung bei Bruchteilen $< \frac{1}{2}$ erfolgen. Hätte man etwa die Quoten $q_1 = q_2 = 1{,}3$ und $q_3 = 1{,}4$, so würde die Standardrundung dazu führen, daß nur 3 Einheiten verteilt werden, obwohl $m = q_1 + q_2 + q_3 = 4$ zur Verfügung stehen. Man muß eine Quote aufrunden, man wird dazu diejenige wählen, für die der Rundungsprozeß die kleinste Änderung bedeutet, also q_3.

Allgemein besteht das Verfahren der größten Reste darin, die „Reste"

$$r_i := q_i - \lfloor q_i \rfloor$$

auszurechnen und dann die Quoten mit den größten Resten aufzurunden, die übrigen abzurunden. Dabei wird die Anzahl der aufzurundenden gerade so bestimmt, daß alle m Einheiten verteilt sind.

Es gibt Gründe, dies Verfahren als das „gerechteste" anzusehen. Mißt man nämlich die Ungerechtigkeit gegenüber P_i an dem Unterschied zwischen seiner Quote q_i und seiner Zuteilung z_i, dann liegt die Forderung nahe

$$\max_i |q_i - z_i|$$

möglichst klein zu machen (allgemeines Prinzip: „Der am schlechtesten Wegkommende soll möglichst gut wegkommen"). Aber auch die Forderung

$$\sum_{i=1}^{p} |q_i - z_i|$$

durch geeignete Zuteilung z_i zu minimieren, ist einleuchtend (allgemeines Prinzip: „Die Gesamt-Ungerechtigkeit soll möglichst klein sein"). Beide Forderungen werden durch das Verfahren der größten Reste – und nur durch dieses – erfüllt.

Jedoch ist durch dieses wichtige und lange bekannte Resultat das Problem der gerechten Verteilung nicht etwa abschließend gelöst. Zum einen sind die benutzten Definitionen von (Un-)Gerechtigkeit in gewisser Weise willkürlich; man kann sogar fragen, ob nicht schon die Berechnung von Quoten den Begriff der Gerechtigkeit mit mehr Mathematik belastet als not tut, kommt doch das der Idee nach äußerst simple d'Hondt-Verfahren ohne Quoten aus. Zum anderen lassen die obengenannten Extremalforderungen („möglichst klein") keinen Raum für die Erfüllung anderer Forderungen. Es wird sich aber zeigen, daß tatsächlich eine große Menge von weiteren Forderungen Interesse verdient.

4. Beispiele

Wir stellen hier einige konkrete Zuteilungen nach dem Verfahren der größten Reste zusammen. Wir interpretieren Ansprüche als Wahlresultate, Zuteilungen als Sitzzahlen. In allen Fällen vergleichen wir die Ergebnisse zweier aufeinanderfolgender Wahlen.

Bsp. 1 $p = 3, m = 4$

$$f(7,3,1) = \{(3,1,0)\}$$
$$f(7,2,2) = \{(2,1,1)\}$$

Kommentar: Wenn der gerechte Anteil von P_1 drei Sitze beträgt, wieso ist er es bei unverändertem Stimmenanteil $\frac{7}{11}$ nicht mehr, weil ein Wähler von P_2 zu P_3 wechselt?

Bsp. 2 $p = 3, m = 3$

$$f(54,26,20) = \{(2,1,0)\}$$
$$f(55,23,22) = \{(1,1,1)\}$$

Kommentar: P_1 gewinnt bei unveränderter Gesamtstimmenzahl einen Wähler und verliert einen Sitz.

Bsp. 3 $p = 3, m = 4$

$$f(24,73,103) = \{(1,1,2)\}$$
$$f(25,72,83) = \{(0,2,2)\}$$

Kommentar: P_1 gewinnt Wähler, die Konkurrenten verlieren Wähler. Dennoch verliert P_1 einen Sitz.

Bsp. 4 $p = 3, m = 4$

$$f(1,3,3) = \{(0,2,2)\}$$
$$f(1,5,3) = \{(1,2,1)\}$$

Kommentar: P_2 gewinnt als einzige Partei Wähler, diese bringen ihr jedoch keinen Nutzen, helfen aber der Partei P_1. Drastischer ausgedrückt: Ein Wähler von P_2 muß feststellen, daß seine Stimme zwar seiner Partei nicht genutzt hat, wohl aber der von ihm verabscheuten Partei P_1 einen Sitz verschafft hat, den diese nicht erhalten hätte, wenn er zu Hause geblieben wäre.

Bsp. 5

$$p = 3, m = 3 \qquad f(3,3,1) = \{(1,1,1)\}$$
$$p = 3, m = 4 \qquad f(3,3,1) = \{(2,2,0)\}$$

Kommentar: Bei unveränderten Ansprüchen erhält P_3 weniger, obwohl mehr zu verteilen ist.

Bsp. 6

$$p = 2, m = 10 \qquad f(14,83) = \{(1,9)\}$$
$$p = 3, m = 10 \qquad f(14,83,3) = \{(2,8,0)\}$$

Kommentar: Hier profitiert P_1 vom Auftreten einer neuen Partei, obwohl sich ihre Wählerzahl – und die von P_2 – nicht geändert hat.

Man mag in dieser Beispielsammlung Fälle finden, die der Idee einer gerechten Zuteilung nur wenig entsprechen. Man wird dann nach Verfahren suchen, die diese Mängel nicht haben. Falls es derartige Verfahren überhaupt gibt, wird man bei ihnen jedenfalls auf die Forderung minimaler Ungerechtigkeit, wie sie im vorigen Abschnitt präzisiert wurde, verzichten müssen, denn diese Eigenschaft kommt nur dem Verfahren der größten Reste zu.

5. Prinzipien einer gerechten Verteilung

Die Vermeidung der in den Beispielen 1–6 demonstrierten Mängel des Verfahrens der größten Reste führt auf die folgenden Prinzipien:

Die Zuteilung an P_1 darf sich nicht verringern, wenn

1) der Anspruch von P_1 und die Gesamtstimmenzahl unverändert bleiben,
2) der Anspruch von P_1 wächst bei unveränderter Gesamtstimmenzahl,
3) der Anspruch von P_1 wächst bei nichtwachsenden Ansprüchen der übrigen Parteien,
4) der Anspruch von P_2 fällt, alle anderen Ansprüche unverändert bleiben,
5) alle Ansprüche unverändert bleiben und m wächst,
6) eine von P_1 verschiedene Partei mitsamt ihren Wählern aus der Konkurrenz ausscheidet.

Stärker formalisiert, schreiben sich die Prinzipien 1–5 so:

Es sei $(z_1, \dots, z_p) \in f(w_1, \dots, w_p)$ und $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_p) \in f(w_1, \dots, w_p)$. Dann ist $\bar{z}_1 \geq z_1$, wenn gilt

A 1 $\quad \bar{w}_1 = w_1$ und $\sum_{i=1}^{p} w_i = \sum_{i=1}^{p} \bar{w}_i$

A 2 $\quad \bar{w}_1 > w_1$ und $\sum_{i=1}^{p} w_i = \sum_{i=1}^{p} \bar{w}_i$

A 3 $\quad \bar{w}_1 > w_1$ und $\bar{w}_i \leq w_i \; (i = 2, 3, \dots, p)$

A 4 $\quad \bar{w}_2 < w_2$ und $\bar{w}_i = w_i \; (i = 1, 3, 4, \dots, p)$

A 5 $\quad \bar{w}_i = w_i \; (i = 1, \dots, p)$ und m wächst.

Außerdem

A 6 Es sei $(z_1, \ldots, z_p) \in f(w_1, \ldots, w_p)$ und $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{p-1}) \in f(w_1, \ldots, w_{p-1})$.
Dann ist $\bar{z}_1 \geq z_1$.

Es ist nun bemerkenswert, daß diese Forderungen – mit Ausnahme von **A 3** – durch kein Zuteilungsverfahren erfüllt werden können.

Bei **A 1** ist das ganz leicht zu sehen: Für jedes Zuteilungsverfahren gilt bei $m = 1$

$$f(1,1) = \{(1,0),(0,1)\}.$$

Wählt man nun $w_1 = \overline{w}_1 = w_2 = \overline{w}_2 = 1$, $(z_1, z_2) = (1,0)$ und $(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = (0,1)$, so hat man einen Widerspruch zu **A 1**.

Bei **A 2** geht man so vor: Bei $m = 1$ ist $f\,(3,3,2)$ entweder $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ oder $\{(0,0,1)\}$ oder $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Im ersten und dritten Fall müßten bei $f\,(4,4,0)$ erste und zweite Komponente der Zuteilung Eins sein, im Widerspruch zu $m = 1$. Im zweiten Fall müßte $f\,(3, 2, 3) = \{(0, 0, 1)\}$ sein, was der Gleichberechtigung von P_1 und P_3 widerspricht.

A 3 wird vom d'Hondt-Verfahren erfüllt, wie unschwer zu beweisen.

Bei **A 4** kommt man ebenfalls mit $m = 1$ von

$$f(1,1,1) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

ausgehend, leicht zu einem Widerspruch, ebenso bei **A 5**. Bei **A 6** ergeben die beiden Zuteilungen

$$f(1,1,1) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$f(1,1) = \{(1,0),(0,1)\},$$

die für jedes Verfahren gelten müssen, einen Widerspruch.

In allen Fällen kommt das unseren Gerechtigkeitsprinzipien widersprechende Resultat durch Aufeinanderfolge von Los-Glück und Los-Pech zustande. Das mag wenig überzeugend sein, es ist aber zu beachten, daß bei kleinen Wählerzahlen (wie vielfach in Hochschulen) Entscheidung durch Los keineswegs ein ganz seltenes Vorkommnis ist. Unsere Forderungen sind unerfüllbar, gleichwohl präzisieren sie Vorstellungen, die allgemein mit dem Begriff der gerechten Verteilung verbunden werden. Man wird sie daher nicht aufgeben, sondern in (etwas) anderer Weise präzisieren.

Man könnte etwa fordern, daß es zu jeder Zuteilung $(z_1, \ldots, z_p)$ eine Zuteilung-$(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ gibt, für die die jeweilige Forderung erfüllt ist (also nicht wie oben für alle Zuteilungen zu $(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_p)$, sondern für eine!). So gehen Balinski/Young [1] bei **A5** tatsächlich vor. Mir erscheint dies für die übliche Wahlprozedur wenig sinnvoll, es muß doch, wenn eine zweite Wahl durchgeführt wird, das Losverfahren wieder stattfinden.

Hier wird vorgeschlagen, die Intuition hinter den Forderungen dahingehend zu präzisieren, daß sich bei den jeweiligen Übergängen die Los-Chancen nicht verschlechtern. Dazu werde definiert:

Definition: Es sei $f(w_1, w_2, \ldots, w_p) = \{(z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}, \ldots, z_p^{(\nu)}), \nu = 1, 2, \ldots, l\}$. Dann heißt

$$\mathscr{E}_i\,[f(w_1, \ldots, w_p)] := \frac{1}{l} \sum_{\nu=1}^{l} z_i^{(\nu)}$$

der Erwartungswert der Zuteilung an P_i bei dem Anspruch $(w_1, \ldots, w_p)$.

Man wird nun die unerfüllbaren Forderungen dadurch zu retten suchen, daß man die Aussage $\bar{z}_1 \geq z_1$ ersetzt durch

$$\mathscr{E}_1\,[f(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_p)] \geq \mathscr{E}_1\,[f(w_1, \ldots, w_p)]$$

In dieser schwächeren Form werden nun **A 4**, **A 5**, **A 6** tatsächlich vom d'Hondt-Verfahren erfüllt (aber nicht vom Verfahren der größten Reste, die Gegenbeispiele aus Abschnitt 4 gelten auch hier). Dagegen lassen sich **A 1** und **A 2** auch in der abgeschwächten Form nicht erfüllen. Das läßt sich wieder durch Gegenbeispiele zeigen, für den schwierigen Fall **A 2** werde es im nächsten Abschnitt ausgeführt.

6. Ein negatives Resultat

Prinzip **A 2′**: Ist $\sum_{i=1}^{p} w_i = \sum_{i=1}^{p} \overline{w}_i$ und $\overline{w}_1 > w_1$, so gilt

$$\mathscr{E}_1[f(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_p)] \geq \mathscr{E}_1[f(w_1, \ldots, w_p)]\,.$$

Satz: Es gibt kein Zuteilungsverfahren, das **A 2′** erfüllt.

Beweis: Es wird die Annahme, daß man für $p = 3$, $m = 1$, $w_1 + w_2 + w_3 = 10$ die Zuteilungen so einrichten kann, daß **A 2′** erfüllt ist, zum Widerspruch geführt. Sei also f ein solches Verfahren.

(i) Es ist $\mathscr{E}_i\,[f(4, 3, 3)] = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$.

Denn es gibt aus Symmetriegründen nur die Möglichkeiten

$$f(4,3,3) = \{(1,0,0)\}$$
$$f(4,3,3) = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$f(4,3,3) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Der erste Fall würde $f(5,5,0) = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ widersprechen, denn hier würde die Steigerung des Anspruches von 4 auf 5 ja mit einem Rückgang des Erwartungswertes von 1 auf $\frac{1}{2}$ verbunden sein.

Im zweiten Fall folgte aus Symmetriegründen

$$f(3,4,3) = \{(1,0,0),(0,0,1)\},$$

was aber mit der Aussage über $f(4, 3, 3)$ kollidiert, denn das Wachstum der zweiten Komponente von 3 auf 4 würde ja einen Rückgang des zugehörigen Erwartungswertes von $\frac{1}{2}$ auf 0 bedingen.

Es muß somit der dritte Fall gelten.

(ii) Es ist $\mathscr{E}_i\,[f(4, 4, 2)] = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$.

Denn es gibt aus Symmetriegründen nur die Möglichkeiten

$$f(4,4,2) = \{(0,0,1)\}$$
$$f(4,4,2) = \{(1,0,0), 0,1,0), (0,0,1)\}$$
$$f(4,4,2) = \{(1,0,0), (0,1,0)\}.$$

Im ersten Fall folgte aus Symmetriegründen

$$f(4,2,4) = \{(0,1,0)\},$$

was in der dritten Komponente zum Widerspruch führt. Im zweiten Fall folgte nach **A 2′**

$$f(7,0,3) = \{(1,0,0), (0,0,1)\},$$

denn P_1 und P_3 müßten mindestens den Erwartungswert $\frac{1}{3}$ haben, P_2 sicher 0, aber die Summe der Erwartungswerte muß 1 sein, und es sind nur die Erwartungswerte $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ möglich. Geht man nun von (7, 0, 3) zu (4, 2, 4) über, so erhielte man bei P_3 einen Widerspruch.

Es muß somit der dritte Fall gelten.

(iii) Es ist $\mathscr{E}_i\,[f(5, 3, 2)] = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$.

Denn aufgrund von (ii) muß $\mathscr{E}_1\,[f(5, 3, 2)] \geq \frac{1}{2}$ sein. Demnach gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

$$f(5,3,2) = \{(1,0,0)\}$$
$$f(5,3,2) = \{(1,0,0), (0,0,1)\}$$
$$f(5,3,2) = \{(1,0,0), (0,1,0)\}.$$

Gälte der erste Fall, so folgte $\mathscr{E}_1\,[f(6, 4, 0)] = 1$ und wegen (i) $\mathscr{E}_2\,[f)6, 4, 0)] \geq \frac{1}{3}$, was nicht gleichzeitig richtig sein kann.
Gälte der zweite Fall, dann wäre $f(5, 2, 3) = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, was bei P_3 zum Widerspruch führt.

Es muß somit der dritte Fall gelten.

Nach diesen Vorbereitungen kann der Beweis leicht geführt werden. Es ist nämlich nach (iii)

$$\mathscr{E}_2\,[f(5,3,2)] = \frac{1}{2},$$

und nach (i) ist

$$\mathscr{E}_2\,[f(3,4,3)] = \frac{1}{3}.$$

Damit ist **A 2′** verletzt, es kann also ein solches f überhaupt nicht geben.

7. Diskussion

Das d'Hondt-Verfahren erfüllt **A 3** und die modifizierten Prinzipien **A 4, A 5, A 6**. Das Verfahren der größten Reste verletzt alle diese Forderungen. Das besagt aber nicht viel, insbesondere können diese Argumente nicht zu einer Ablehnung des Verfahrens der größten Reste dienen, denn die genannten Forderungen werden sämtlich auch erfüllt von dem Verfahren „Der Größte erhält alles" (unter mehreren Größten wird gelost), das wohl niemand als gerecht ansehen wird. Man wird also zur Einkreisung des Begriffes der gerechten Verteilung weitere Forderungen stellen müssen.

Naheliegend ist etwa: Wenn eine Partei die Hälfte der Stimmen hat, dann soll sie die Hälfte der Mandate erhalten (sofern m gerade ist). Diese und alle ähnlichen „Proporz"-Forderungen werden vom d'Hondt-Verfahren (u. U. gravierend) verletzt, aber vom Verfahren der größten Reste erfüllt. Sehr naheliegend und wohl allgemein akzeptiert ist auch das „Monotonie-Prinzip":

$$\text{Sei } (z_1, \dots, z_p) \in f(w_1, \dots, w_p). \text{ Ist } w_1 > w_2, \text{ so ist } z_1 \geq z_2.$$

Unstrittig ist wohl auch

$$\text{Sei } (z_1, \dots, z_p) \in f(w_1, \dots, w_p). \text{ Ist } w_1 = w_2, \text{ so ist } |z_1 - z_2| \leq 1.$$

Weiter sind Forderungen plausibel, die den Einfluß des Losens zurückdrängen.

Für die Theorie der Zuteilungsverfahren sind aber auch noch Prinzipien von Belang, die aus politischen Forderungen stammen, ohne unmittelbar evidente oder weitgehend akzeptierte Präzisierungen der Idee der Gerechtigkeit zu sein. Typisch dafür ist die Forderung, daß eine Koalition, die die Mehrheit der Wähler hat, auch die Mehrheit der Mandate erhält. Bei der Besetzung der Ausschüsse im Parlament gemäß den Fraktionsstärken wird man auf diese Forderung nicht verzichten können, ohne die Arbeitsfähigkeit des Parlaments zu gefährden.

Wir stehen also vor der Situation, daß an Zuteilungsverfahren eine Fülle von Forderungen gestellt werden, die ihre „Gerechtigkeit" („Fairness", „Angemessenheit", „Natürlichkeit", „politische Brauchbarkeit") sichern sollen. Kein Verfahren erfüllt alle, man wird bei jedem konkreten Problem entscheiden müssen, auf welche Forderungen verzichtet werden kann. Das ist aber nur dann sachgerecht möglich, wenn über die Implikationen der einzelnen Prinzipien Klarheit besteht. Damit ergibt sich für die mathematische Analyse ein weites Feld. Über deren Ergebnisse werde ich an anderer Stelle berichten.

Literatur

[1] M. L. Balinski/H. P. Young: Fair Representation. Yale University Press 1982
[2] K. Kopfermann: Mathematische Aspekte der Wahlverfahren. B. I. Wissenschaftsverlag 1991

Prof. Dr. Helmut Braß
Hilsstraße 26 · 38122 Braunschweig